ÉNONCÉ

1. TH : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

2. CORR : $\exists!$ $f : \begin{cases} S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ S \mapsto S^{1/2} \end{cases}$ homéo. (avec $(S^{1/2})^2 = S$)

3. CORR : $\varphi : \begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \longmapsto OS \end{cases}$ homéo

d'inverse $\psi : \begin{cases} Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto (M(M^tM)^{-1/2}, (M^tM)^{1/2}) \end{cases}$.

LEÇONS.

152

154

157

158

RÉFS.

1. Nouvelles histoires hédonistes de gr. et géom. tome 2. Caldero Germoni p. 209.

2. 3. SANS RÉF.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. Th. spectral.
2. si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \rho(A)$
3. th BW + $\exists!$ val adhé $\Leftrightarrow$ cv en dim finie.

DÉMO

: à l'oral. : pour comprendre.
: écrit au tableau. : élems de structure

1. ① bien définie
② surjectivité
③ injectivité
④ Continuité(s).

① à val ds $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Pr calculer des exp, on aime diagonaliser

Par le théorème spectral : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, $S = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^t$ P^{-1}

D'où : $\exp(S) \underset{\text{prop exp}}{=} P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^t \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car les $e^{\lambda_i} > 0$. $\forall i$ caract S_n^{++} : vp > 0.

détail prop exp pr 155

② surjectivité

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On va trouver un anté.

même chose : diagonaliser

Par le th. spectral, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\mu_1 \dots \mu_n \in \mathbb{R}_+^*$, $B = P\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}P^t$

On s'est ramené à $\mathbb{R}$ via les μ_i.

Or exp réelle est bijective.

Posons $A = P\begin{pmatrix} \ln(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ln(\mu_n) \end{pmatrix}P^t \in S_n(\mathbb{R})$: ln pas tjrs ≥ 0 mais comme $P \in O_n(\mathbb{R})$, on reste dans $S_n(\mathbb{R})$.

On a : $B = \exp(A)$ en utilisant encore les prop de exp.

③

Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \exp(A')$.

comme d'hab : diagonaliser.

Version hors 152 :

. Notons $S = Sp(A) \cup Sp(A')$

. Q poly interpol Lagrange tq $Q(e^{\lambda}) = \lambda \quad \forall \lambda \in S$.

$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$, $P \in O_n(\mathbb{R})$

$Q(e^A) = P\begin{pmatrix} Q(e^{\lambda_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(e^{\lambda_n}) \end{pmatrix}P^{-1} = A$. De m̂ $Q(e^{A'}) = A'$.

or, $Q(e^A) = Q(e^{A'})$ donc $A = A'$.

version 152 :

là on a 2 matrices ! PR pv remonter à l'égalité, il faut CODIAGONALISER

PR ça on a besoin que A et A' commutent.

Montrons que A, A' commutent

On sait que $\mathbb{R}[A]$ est 1 alg commutative. On va passer par ça.

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\quad A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1} \quad \lambda_1, \dots \lambda_n \subset \mathbb{R}.$

On note $\lambda_1' \dots \lambda_n'$ les vp. de A'

Soit $Q \in \mathbb{R}[A]$ tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i \quad \forall i = 1, \dots n.$

$\exists$: polynôme interpolateur de Lagrange

hyp needed pr lagrange.

$$Q = \sum^{R} e^{\lambda_i} \prod_{j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \qquad \text{avec } \lambda_1 \dots \lambda_n \text{ 2 à 2 } \neq.$$

A' commute avec $Q(\exp(A'))$ ← composée de polynômes en A'.

hyp → $= Q(\exp(A))$

$$= Q\left(P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}\right) \qquad (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$$

$$= P\, Q\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{→ déf de } Q$$

$$= P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$= A$

psb $P \neq P_0$ et donc pas la ñ base !

Donc A, A' sont co-diagonalisables

$$\exists P_0 \in GL_n(\mathbb{R}),\quad \begin{cases} A = P_0\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P_0^{-1} \\ A' = P_0\begin{pmatrix}\lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n'\end{pmatrix}P_0^{-1}\end{cases}$$

→ quitte à réindicer les λ_i

$$\exp(A) = \exp(A') \iff P_0\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P_0^{-1} = P_0\begin{pmatrix}e^{\lambda_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n'}\end{pmatrix}P_0^{-1}$$

$$\iff \forall i \in \{1, \dots n\},\ e^{\lambda_i} = e^{\lambda_i'}$$

$$\iff \forall i \in \{1, \dots n\},\ \lambda_i = \lambda_i'$$ car exp $\mathbb{R}$ est surject.

D'où $A = A'$

4 • exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc sur $S_n(\mathbb{R})$ (sa restrict)

Il suffit de mq la réciproque est continue.

On va proc. par caract séq.

Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} := (\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B_p \xrightarrow[p\to\infty]{} B := \exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\uparrow$ surject ; $A_p \in S_n(\mathbb{R})$; $A \in S_n(\mathbb{R})$

BUT : $A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} A$.

CV d'une sous suite : On utilise le th de BW.

Pr passer aux considérations sur A_p, A, comme d'hab on veut regarder les vp.

Comment relier vp et cv ?

$\rightarrow$ Rayon spectral.

S_n^{++}, les vp > 0 $\downarrow$ donc pas |·|.

LEM : $\forall M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \rho(M) = \max\{\lambda \in Sp(M)\}$

$\rho(B_p) \to \rho(B)$ donc bornée
$\exists m>0$, $\forall \lambda \in Sp(B_p)$ $|\lambda| < m$.

Or,

$(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée par $\|\cdot\|_2$ car CV. donc $\exists m>0$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $Sp(B_p) \subset]0,m]$

$(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ " " vers B^{-1} par continuité de $M \mapsto M^{-1}$

où B et B_p inv car dans S_n^{++}

Donc $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ bornée par $\|\cdot\|_2$. donc $\exists m'>0$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $Sp(B_p^{-1}) = (Sp(B_p))^{-1} \subset]0,m']$

Et par le rappel, on peut en déduire une majo des vp.

Donc $\forall \lambda \in Sp(B_p)$, $\lambda = \frac{1}{\mu}$, $\mu \in Sp(B_p^{-1})$ et $|\mu| \leq m'$ $\Rightarrow$ $|\lambda| \geq \frac{1}{m'}$

Rq : on regarde B_p^{-1} car veut $\underbrace{\text{compact}}_{\text{pr appli BW}} \subset \underbrace{]0,+\infty[}_{\text{pr passer au log.}}$

si on regarde slmt (B_p) on aura $\subset]0,m]$: insuffisant.

Ainsi, $Sp(B_p) \subset [\frac{1}{m'}, m] \subset]0,+\infty[$

Donc $Sp(A_p) \subset [-\ln(m'), \ln(m)] \subset \mathbb{R}$ $\rightarrow$ exp réelle est bijext.

On a eu ce qu'on voulait pr vp $\rightarrow$ on revient aux matrices.

Donc $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ bornée pr $\|\cdot\|_2$

Par le théorème de Bolzano Weierstrass, ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ ev de dim finie)

$\exists \sigma$ extraction tq $(A_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ CV.

CV de la suite : (Comme dim finie, il suffit de mq A est l'unique val d'adhérence de (A_p)).

• Soit φ extract tq $A_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{} \tilde{A}$

mq $A = \tilde{A}$.

$\exp(A) = \lim_{p\to\infty} \exp(A_{\varphi(p)}) = \exp(\tilde{A})$ par continuité de exp.

D'où $A = \tilde{A}$ par injectivité.

A est la seule valeur d'adhérence de (A_p) donc $A_p \to A$

vient de montrer

$\downarrow$
car dans ev dim finie : bornée + 1 seule val adhé $\Rightarrow$ CV.

VERSION HORS 152 :

2. APPLI (DÉCOMPO POLAIRE) :

* On définit $f : \begin{cases} S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ S \longrightarrow S^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}\exp^{-1}(S)\right) \end{cases}$

f homéo par composition.

$\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\left(S^{1/2}\right)^2 = \exp(\exp^{-1}(S)) = S$

en parler si le temps :

* $\varphi : \begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \longmapsto OS \end{cases}$ (bien déf) continue

$\psi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto \left(M(M^tM)^{-1/2}, (M^tM)^{1/2}\right). \end{cases}$, bien déf car $M^tM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$

continue.

donc $(M^tM)^{1/2}$ et $(M^tM)^{-1/2}$ bien déf.

on vérifie que inverses l'1 de l'autre